

二元樹模型估計美式選擇權價格敏感度的數值效率

陳俊傑¹、邱雅婷²

¹樹德科技大學 金融管理系

²樹德科技大學 金融管理所

通訊作者：陳俊傑

聯絡地址：高雄市燕巢區橫山路 59 號

電子郵件：buddha@stu.edu.tw

投稿日期：2020 年 3 月

接受日期：2020 年 6 月

摘 要

隨著衍生性商品的普及化，選擇權已經成為各大衍生性金融市場最熱門的商品。目前市場上的選擇權幾乎是以美式選擇權為主，由於美式選擇權具有可以提早履約的特性，使其評價難度相對提高。過去，有諸多學者陸續提出關於美式選擇權的定價方法，然而，對其避險參數估計之研究卻明顯較少。針對這方面文獻的缺口，本研究分別採用二元樹模型、擴展二元樹模型、BBS 樹狀模型、擴展 BBS 樹狀模型等，進行美式選擇權避險參數之比較。結果發現，BBS 法無法適用於美式選擇權之避險參數估計上，亦即 BBS 法的穩定性依然會受到差分擾動量 h 值的影響。因此，就美式選擇權避險參數之估計效率與準度而言，擴展二元樹模型仍是較佳的模型選擇。

關鍵詞：美式選擇權、二項式模型、避險參數

壹、緒論

一、研究背景與動機

自從全世界最早交易選擇權的交易所—芝加哥選擇權交易所(CBOE)，將 Black-Scholes (以下簡稱 B-S) 模型程式化輸入電腦應用於選擇權交易實務後，依據該模型演變至今，目前已經廣泛被選擇權交易商、金融業者、保險機構等所使用。隨著衍生性商品的普及化，選擇權已經成為各大衍生性市場最熱門的商品，有愈來愈多的交易者開始接觸選擇權，學術上也有許多學者對選擇權進行探討，其中仍以研究選擇權定價者居多，相形之下，有關選擇權避險參數估計之研究則似乎略少。

選擇權發展至今，人們除了較為關切的定價模型外，其

避險參數也逐漸受到重視，由於金融機構提供予交易者愈來愈多樣化的選擇權商品，而這些新一代的選擇權通常沒有標準的定價公式，若無法準確推算出選擇權價值，交易者可能會遭受大幅的損失，也可能因此降低選擇權這項投資工具的吸引力。為了避免可能的損失，交易者將面臨避險的問題，雖然有部份人士提議採停損策略，但其避險效果卻不如預期，故多數交易者紛紛採用較為複雜，卻也更有效率的避險方案，而該避險方案則牽涉到一些數值的衡量，其中， Δ 與 Γ 係為選擇權避險常見的兩個重要參數。

由於 Δ 是測量股價變動對於選擇權價值的增減變化，而 Γ 則是衡量選擇權價值與標的資產間之關係曲度，兩者的數值對選擇權避險均佔有極大的關鍵性，交易者亦多以這兩參數作為避險的重要指標，希望藉此將風險維持在可接受的範圍內。因此，如何正確估計避險參數並運用在

各項投資組合裡，無論對投資人或者證券商而言，都是值得重視的課題。

二、研究目的

雖然 Chung and Shackleton (2002)以及張森林等(2008)的研究均顯示，Binomial Black-Scholes（以下簡稱 BBS）模型具有產生單調及平滑收斂的特性，能夠避免發生離散解的問題，且可有效改善歐式選擇權的避險參數估計值；但不同於歐式選擇權者，美式選擇權的最大特點為其可允許提早履約，由於這個緣故，BBS 模型之單調及平滑收斂的特性是否依舊能適用於美式選擇權之避險參數估計上，則顯然還是頗值得商榷。因此，本研究將針對可以提早履約的美式選擇權作為研究標的，用來驗證不同美式選擇權二項避險參數估計法的有效性，並分別採用二元樹模型、擴展二元樹模型、BBS 樹狀模型以及擴展 BBS 樹狀模型等，進行美式選擇權避險參數之比較，希望藉由數值結果的驗證，能找出較佳之模型選擇，以提供未來相關研究或實務上的參考。

三、相關理論及研究

Black and Scholes(1973)發展了 Black-Scholes 選擇權定價模型，此一公式之推出，為往後衍生性金融商品的合理定價奠定了重要的基礎。除了少數的選擇權有封閉解外，大部分的選擇權價格皆以近似值為之，在常用的數值方法中，以樹狀模型運用最為普遍。Cox, Ross and Rubinstein (1979)提出二元樹樹狀模型(以下稱 CRR 模型)，其將存續時間分割為 n 段，並假設每經過一期，標的資產的變動方式僅有上升與下降兩種，隨著價格變動數目的增加，二元樹選擇權定價模型的分佈型態會愈來愈趨向常態分佈，進而與 B-S 模型相一致。Boyle(1986)則延伸發展出三元樹模型，也就是將兩點式跳躍模型，增加為三點式的跳躍模型，亦即將原本只有上升與下降的情況，改為上升、不變與下降三種型態。

根據二元樹模型，Pelsser and Vorst(1994)提出了擴展二元樹模型，其藉由往前推算兩期的時間，讓原本的二元樹模型再延伸出更多的節點，以增加避險參數值估計的準確度。而 Broadie and Detemple(1996)則是提出 BBS 模型來評價美式選擇權，藉由樹狀模型倒數第二期的節點加入 B-S 公式，利用 B-S 的連續值以求算出其選擇權價值。Figlewski and Gao(1999)提出自適應網格法(Adaptive Mesh Modeling)，簡稱 AMM 法，用以改進樹狀模型在處理界限選擇權時所出現的分配誤差和非線性誤差的情形，其方法是對容易產生線性誤差的地方，利用兩期節點間再增設更多的小節點，試圖去減少離散化的問題，從而提高這些部位的解析度。此外，Chung and Shackleton (2002)曾探討歐式選擇權的避險參數，並以

Broadie and Detemple(1996)提出的 BBS 模型，以及 Pelsser and Vorst(1994)提出的擴展二元樹模型作為估計避險參數的主要模型，其結論為 BBS 模型可避免出現離散解的問題，而最能有效計算出準確的歐式選擇權之避險參數值。

隨著選擇權市場的蓬勃發展，評價選擇權的方法日異月新，Hilliard and Schwartz(2005)提出跳躍擴散二元樹模型，該模型可以有效評價多種類型的選擇權，因為它可以容納各式各樣的參數規格，特別是當跳躍波動度很大時，其有能力提供比以前更準確之數值結果。Chung and Shih(2007)藉由一延伸參數發展出 GCRR(Generalized CRR)模型，該模型持續上漲的跳躍幅度與機率都類似 CRR 模型。當分割期數趨近無窮大時，GCRR 之二元樹歐式選擇權價值將會收斂至 B-S 公式。而張森林等(2008)則考慮歐式買權，驗證四種二元樹模型在選擇權定價效率的優劣，以及在計算避險參數 δ 和 γ 的效率性，其中採用 Broadie and Detemple(1996)之 BBS 模型、Tian(1999)之有彈性的二元樹(FB)模型、Heston and Zhou(2000)之平滑報酬(SPF)方法與 Chung and Shih(2007)之 GCRR 模型等，結果發現上述模型在計算歐式買權之 δ 和 γ 時，也能夠產生單調及平滑收斂的特性。

實務上，大部分的選擇權皆以美式選擇權為主，其最大的特色為具有提早履約的特性，因此，在評價分析上較為困難。Bensoussan(1984)為了證明美式選擇權最佳的履約時點，提出了 *penalization* 的方法，該方法在評價美式選擇權時受到太多的限制，以致於近似值較為不佳。Karatzas(1988)根據 Bensoussan(1984)提出的理論進行修正，並設法消除原先的限制。Kaushik et al.(1995)則提出一個離散時間無套利模型來評價美式選擇權，並結合 Heath et al.(1992)所發表的期限結構模型與 Cox, Ross, and Rubinstein(1979)所提出的 CRR 模型，而得到了更準確的美式選擇權價格。蔡明憲等(2000)提出隱含相信模型，透過美式選擇權賣方來決定其上限值，藉由所得的上限值，再配合選擇權買方相信的一臨界履約價格，方可求得美式選擇權的近似解。Longstaff and Schwartz(2001)則是提出最小平方(Least-Square)蒙地卡羅法，該方法可使用在多因素的情況下，藉由繼續持有的條件期望價值，來決定美式選擇權的最佳履約時點，這是傳統有限差分法所不及的。Fatone1 et al.(2015)修正並擴展 Barone-Adesi and Whaley(1987)之美式選擇權評價方法，分別推導出輔助參數與自由邊界的冪級數展開式，數值實證顯示，這些冪級數均具收斂性，並且所得結果亦改善了原有方法之問題。

近來，Burkovska et al.(2018)利用去美式化(de-Americanization)演算法來估計美式選擇權之真實價格，其作法是採二元樹模型先將美式選擇權轉換成相對應之虛擬歐式選擇權，然後再利用校準模型進行美式選擇權理論價格

之計算。但是由於並無真實理論誤差可供控制目標函數之最小化，因此實證結果中發現，該方法亦有可能會產生大的評價誤差。Zhao(2018)探討八種美式選擇權之評價方法，包括二元樹法、三元樹法、顯式有限差分法、隱式有限差分法、二次近似法以及三種蒙地卡羅法等，並比較不同方法的計算效率性與價格準確性。研究發現，二元樹法在所有數值方法中具有最佳之準確性和效率性，而最小平方方法則是三種蒙地卡羅模擬法中結果較佳者。Glau et al.(2019)則是針對每一個時間間隔進行動態規劃，並利用 Chebyshev 多項式內插法來近似其價值函數，藉以估算美式選擇權之理論價格。實證結果顯示，無論在準確性或執行速度上，均較 Longstaff and Schwartz(2001)所提之最小平方蒙地卡羅法更有效率。Rotondi(2019)考量高股利美式選擇權，探討最小平方蒙地卡羅法之迴歸估計偏誤。結果發現，在高股利的情況下，利用最小平方蒙地卡羅法來評價美式買權，可能會發生美式選擇權價格低於相同條件之歐式選擇權價格，並且針對此偏誤也提出了相關的修正方法。Stentoft(2019)討論美式買權數值評價的效率性，並藉由賣權-買權對稱性來改善最小平方蒙地卡羅法的評價結果。研究發現，對稱法可有助於提升模擬運算的效率，並且在評價到期期間長且高波動度的選擇權時，亦能大幅降低價格估計上的偏誤。Letourneau and Stentoft(2019)針對美式選擇權提出拔靴法，來改善最小平方蒙地卡羅法之最佳提早履約邊界的條件期望價值。結果顯示，其價格估計具有不偏性和穩健性，並且數值運算效率明顯優於原始之最小平方蒙地卡羅法。

綜合上述的文獻回顧可知，選擇權發展至今，陸續有學者對選擇權提出新的定價模型，而關於選擇權避險參數的估計卻是相對較少被討論。因此，本研究將進行美式選擇權之樹狀模型避險參數的比較，藉由數值結果的驗證，期能找出較佳之估計選擇。

貳、方法

一、幾何布朗運動與 Black-Scholes 模型

就財務統計觀點而言，任何一個變數，其值會遵循某種機率法則隨著時間而變動，我們將這種變動模式稱為隨機過程。Black-Scholes 模型假設標的資產價格為對數常態分配，亦即股價服從幾何布朗運動，以下為布朗運動之數學式：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

其中， dS ：標的資產的變動、 μ ：標的資產預期報酬率、 S ：標的資產價格、 dt ：極短的時間、 σ ：標的資產波動率、 dz ：韋那過程 z 的變動。

由於 Black-Scholes 定價模型的推導是由買權入手，當時時間 $t=0$ 時，根據 Hull(2018)推導公式於不支付現金股利之歐式買權價格為：

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (2)$$

基於買賣評價理論(Put-Call Parity)，也就是相同履約價的買賣權相減，必為標的資產價格減該履約價格之折現，如果該值不相等或者差距很大，則套利者就會進行套利，讓價差回復合理狀態。以下是歐式賣權推導之價格：

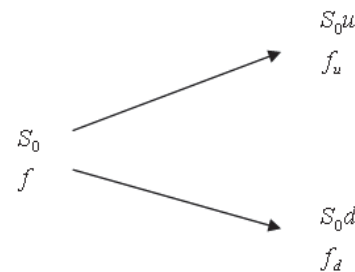
$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (3)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (4)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (5)$$

其中， C ：歐式買權價格、 P ：歐式賣權價格、 S_0 ：當前標的資產價格、 K ：履約價、 r ：無風險利率、 σ ：標的資產波動度、 T ：到期時間、 $N(z)$ ：標準常態分配的累積分配函數，代表一個標準常態變數的值會小於 z 的機率。

二、二元樹模型



圖一 單一期間二元樹之股價與選擇權價格

Cox, Ross and Rubinstein(1979)所提出的二元樹模型，一直以來便被廣泛應用在選擇權定價上，由樹狀圖顯示出股價未來可能的變化走勢。二元樹模型是假設當前股價為 S_0 ，而選擇權目前價格為 f ，到期時間為 T ，未來股價的變動有兩種，第一種是股價上漲至 S_0u ，第二種是股價下跌至 S_0d ，由 S_0 上漲至 S_0u 的機率，我們定義為 p ，而 S_0 由下跌至 S_0d 的機率，則定義為 $1-p$ 。當股價上漲，選擇權到期時投資組合的價值為 $S_0u\Delta - f_u$ ；若股價下跌，則選擇權在到期時的投資組合價值為 $S_0d\Delta - f_d$ ，因兩者相等之下，則 $S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$ ，由此可得

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \quad (6)$$

到此，投資組合為無風險，而且一定可賺得無風險利率，接著，我們定義 r 為無風險利率，則投資組合的現值為 $(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$ ，另投資組合的成本 $S_0 \Delta - f$ ，因此 $S_0 \Delta - f = (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$ ， $f = S_0 \Delta - (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$ ，將第(6)代入上式簡化後可得

$$f = e^{-rT} [p f_u + (1-p) f_d] \quad (7)$$

其中， $p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$ 、 $u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$ 、 $d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$ 。

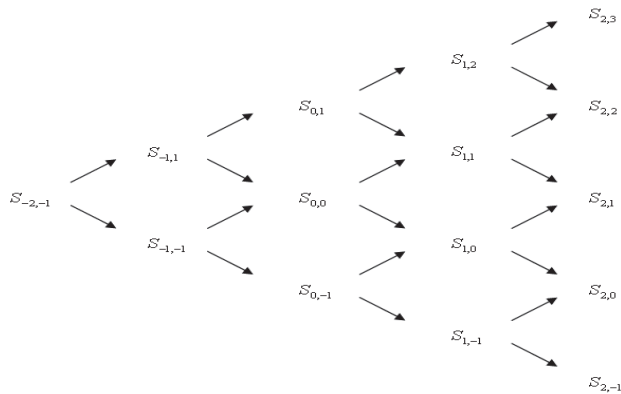
二元樹模型可以處理較為複雜的選擇權定價，本研究係針對避險參數 Δ 與 Γ 進行探討，其估計方式則是採用數值差分運算如下：

$$\Delta = \frac{f(S_0 + h, T) - f(S_0 - h, T)}{2h} \quad (8)$$

$$\Gamma = \frac{\frac{f(S_0 + h) - f(S_0)}{h} - \frac{f(S_0) - f(S_0 - h)}{h}}{h} \quad (9)$$

其中 h 代表差分擾動量。

三、擴展二元樹模型



圖二 擴展二元樹樹狀圖

為了可以更準確估計選擇權之避險參數值，Pelsser and Vorst(1994)將標準二元樹模型進一步延伸為擴展二元樹模型，擴展程序為自 $t=0$ 時，往前回推二期期數。 $S_{0,0}$ 為當前的股價，其中，第一個下標符號代表期數，第二個下標符號代表股價狀態，以 $t=0$ 往前推算兩期為 $S_{-2,-1}$ ，由該點擴展的二元樹會有兩個節點涵蓋 $S_{0,0}$ ，分別表示為 $S_{0,1}$ 與 $S_{0,-1}$ ，至於該模型的推導過程則與原始二元樹模型相同。

在擴展二元樹的部分，我們同樣探討 Δ 與 Γ 兩種避險參數，其中， Δ 是衡量股價變動對選擇權價值增減變化的影響， Γ 是用來測量 Δ 的敏感度，因此， Γ 可說是 Δ 的一階微分，換言之， Γ 也是標的物價格

對其選擇權價格變動的二次微分。至於擴展二元樹模型之 Δ 與 Γ 避險參數的估計式則可分別寫成：

$$\Delta = \frac{f(S_{0,1}) - f(S_{0,-1})}{S_{0,1} - S_{0,-1}} \quad (10)$$

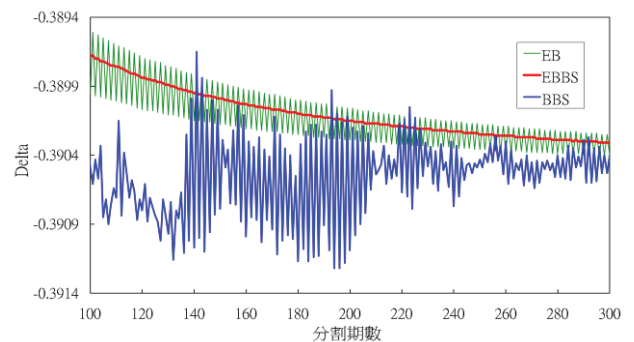
$$\Gamma = \frac{2 \left[\frac{f(S_{0,1}) - f(S_{0,0})}{S_{0,1} - S_{0,0}} - \frac{f(S_{0,0}) - f(S_{0,-1})}{S_{0,0} - S_{0,-1}} \right]}{S_{0,1} - S_{0,-1}} \quad (11)$$

四、BBS 與擴展 BBS 模型

原本的二元樹模型不屬於連續時間的模型，為了降低其產生的離散化問題，BBS 模型與擴展 BBS 模型分別在二元樹樹狀圖之倒數第二期的定價節點納入 B-S 公式，期使加速估計出更準確的樹狀模型解。這是由於該模型假設美式選擇權在倒數第二期至最後一期的這段期間，美式選擇權的價值會等於歐式選擇權，因此在倒數第二期的定價節點納入 B-S 公式，可以使時間變化更具連續性。

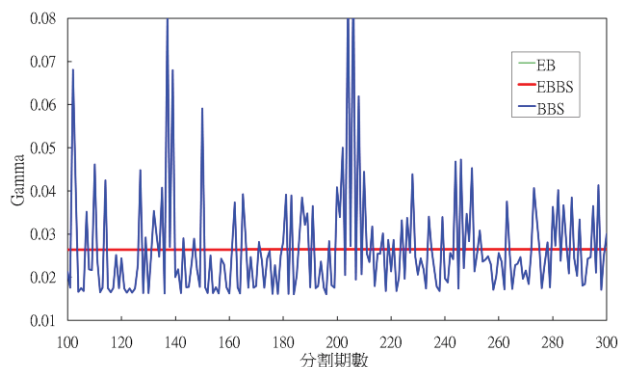
參、結果

美式選擇權直至目前為止尚未有封閉解，因此僅能以數值模擬的方式來求得近似值，常見的計算選擇權之數值方法中，以二元樹模型的運用最廣。本研究主要考量美式選擇權避險參數中之 Δ 與 Γ ，分別採用二元樹模型(Bin)、擴展二元樹模型(EB)、BBS 樹狀模型(BBS)以及擴展 BBS 樹狀模型(EBBS)等進行探討，並藉由數值結果的驗證，以找出較佳之估計模型。參照過去文獻諸如 Broadie and Detemple (1996)以及 Zhao(2018)等，分別選擇分割期數為 50000 期之擴展二元樹模型解作為基準，且採用分割期數為 300 期來進行各樹狀模型避險參數之比較，以同時兼顧運算速度和數值收斂性。其相關參數範圍則設定如下：選擇權型態：美式賣權、標的資產(S)：36~44、差分擾動量(h)：0.01~2、履約價(K)：40、無風險利率(r)：0.06、波動度(σ)：0.2~0.6、到期日(T)：1 年。



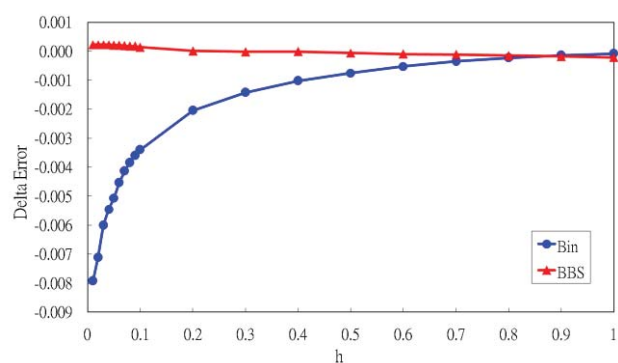
圖三 當 $h=0.01$ 、 $S=40$ 、 $\sigma=0.4$ 時，各模型在不同分割期數下的 Δ 值

由圖三中，可明顯觀察到，在差分擾動量 h 值較小時，BBS 法有嚴重波動現象，尤其當期數介於 140~200 期時，波動程度更是劇烈， δ 值約在 -0.3899~-0.3909 之間上下震盪，但隨著期數的增加，波動度逐漸遞減並趨於緩和，此時 δ 值縮小波動幅度約在 -0.3904 附近。此外，EB 法亦有小幅度且平穩的振盪，而隨著期數的增加，波動程度遞減且逐漸下降， δ 值由 100 期時的 -0.3894~-0.3899 之間，持續下降至 300 期時的 -0.3899~-0.3904。至於 EBBS 法則呈單調遞減之平滑曲線，其數值結果明顯穩定地介於 EB 法之波動間。因此，相較於 BBS 法而言，EB 法與 EBBS 法在避險參數 δ 的衡量上是變異小而較為準確的，其中又以 EBBS 法更佳。



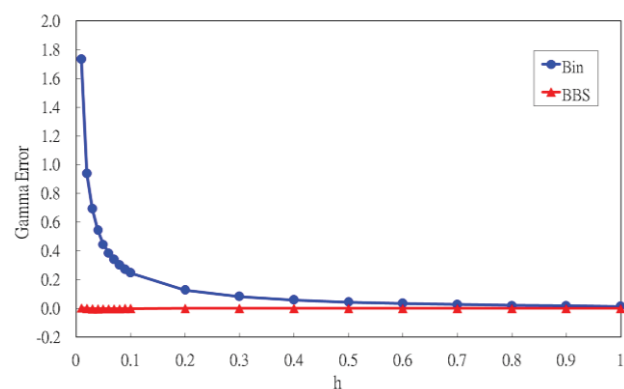
圖四 當 $h=0.01$ 、 $S=40$ 、 $\sigma=0.4$ 時，各模型在不同分割期數下的 Gamma 值

圖四顯示 BBS 法的波動度非常劇烈，尤其在 100 期、140 期與 200~220 期更甚， γ 值最低點與最高點分別為 0.02 與 0.08，兩者相差近 4 倍。而 EB 法與 EBBS 法的 γ 值則是幾乎重疊在一起，均落在 0.02 至 0.03 之間，呈現一條平行線。綜合上述觀察，可發現當差分擾動量 h 值較小時，BBS 法之避險參數 γ 值的估計，會產生很大的波動且結果不可靠，由此可知，BBS 法對於改善美式選擇權的避險參數值成效不彰，反倒是 EB 法與 EBBS 法則較能有效估計避險參數值。



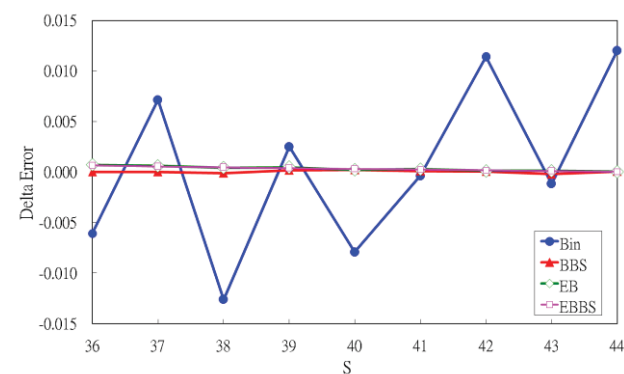
圖五 當 $S=40$ 、 $\sigma=0.4$ 時，Bin 與 BBS 在分割期數為 300 期下 h 值對 Delta 誤差值之影響

在圖五中可見，Bin 法在 $h=0.01$ 至 $h=0.1$ 間之 δ 誤差有很明顯的下降，由約 -0.008 下降至 -0.003，後續下降幅度趨緩，至 $h=1$ 時的 δ 誤差大約在 0 附近，另與 BBS 法在 $h=0.01$ 相比之下，兩者相差近 8 倍，由此可知，Bin 法在 $h=0.01$ 至 0.1 時的 δ 誤差皆較嚴重。整體而言，BBS 法所得的估計結果係優於 Bin 法，此外，對照圖三可發現，隨著分割期數的增加，的確有助於降低 δ 誤差，但兩者之數值解卻依然是受到差分擾動量 h 值大小的影響。



圖六 $S=40$ 、 $\sigma=0.4$ 時，Bin 與 BBS 在分割期數為 300 期下 h 值對 Gamma 誤差值之影響

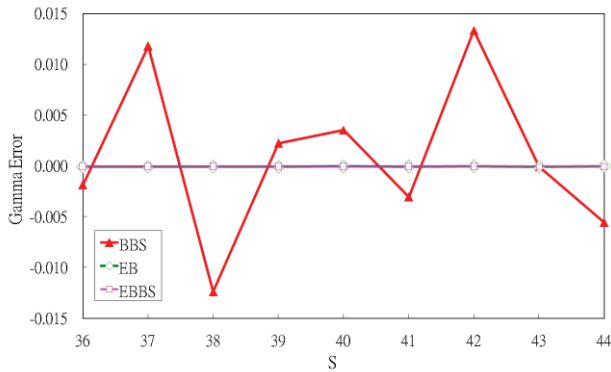
圖六顯示，當 h 值由 0.01 增加至 0.1 時，Bin 法之 γ 誤差由約 1.8 快速下降至約 0.2，降幅約為 9 倍，且隨著 h 值愈大，Bin 法的準確度明顯提升，但相對於 BBS 法而言，Bin 法依然是較差的選擇，因為不論是在任何 h 值下，Bin 法的 γ 誤差皆大於 BBS 法。此外，對照圖四可發現，當差分擾動量 h 值較小時，分割期數的增加未必能有助於降低 γ 誤差，兩者之數值解依然是會受到差分擾動量 h 值大小的影響。



圖七 當 $h=0.01$ 、 $\sigma=0.4$ 時，各模型在分割期數為 300 期下 S 對 Delta 誤差值之影響

在圖七中，我們明顯發現在分割期數為 300 期時，Bin 法不論是在價內、價平或是價外， δ 誤差同樣有很大的起伏，誤差值介於 -0.015 至 0.015 之間。而 BBS 法、EB 法與

EBBS 法三者分期數 300 期時 Delta 誤差都非常接近，然而 BBS 法的數值結果係呈現不穩定的狀態，此由圖三中可發現，當 $h=0.01$ 時，BBS 法之 delta 值會隨著期數的不同而產生劇烈之振盪現象，反觀 EB 法或 EBBS 法則起伏小而較為穩定，尤其 EBBS 法係呈單調遞減之趨勢，故所得之數值結果亦明顯更具可信度，因此，我們在估計 delta 值時依然會選擇 EB 法或 EBBS 法。



圖八 當 $h=0.01$ 、 $\sigma=0.4$ 時，各模型在分割期數為 300 期下股價對 Gamma 誤差值之影響

由於 Bin 法呈現間斷而不規則的分布，且價內與價平的 gamma 誤差值皆嚴重過大，已經完全不在座標軸之設定範圍內，故並未繪製於圖八內。由圖可見，BBS 法之 gamma 誤差值在分割期數為 300 期的情況下，仍有明顯的起伏。另 EB 法與 EBBS 法幾乎完全重疊於 0，而且由圖四中可看出，EB 法與 EBBS 法亦呈現平滑的直線，並且互相重疊，只有 BBS 法會隨著期數的不同而產生劇烈之振盪現象，因此，EB 法與 EBBS 法對於避險參數 gamma 值的估計結果顯然是較為準確的。

表一 當 $K=40$ 、 $r=0.06$ 、 $T=1$ 、Step=300 時，各模型之 Delta 估計結果

S	σ	Benchmark Delta	EB	EBBS	h=0.01		h=0.1	
					Bin	BBS	Bin	BBS
36	0.2	-0.69680	-0.69634	-0.69650	-0.69524	-0.69688	-0.69530	-0.69701
40	0.2	-0.40475	-0.40504	-0.40497	-0.41102	-0.40469	-0.40705	-0.40493
44	0.2	-0.21407	-0.21455	-0.21458	-0.20602	-0.21415	-0.20686	-0.21417
36	0.4	-0.50875	-0.50802	-0.50810	-0.51481	-0.50872	-0.51484	-0.50880
40	0.4	-0.39063	-0.39040	-0.39031	-0.39855	-0.39040	-0.39403	-0.39049
44	0.4	-0.29582	-0.29577	-0.29577	-0.28380	-0.29575	-0.28473	-0.29584
36	0.6	-0.43621	-0.43520	-0.43532	-0.43447	-0.43604	-0.43450	-0.43611
40	0.6	-0.36269	-0.36216	-0.36204	-0.37125	-0.36263	-0.36638	-0.36273
44	0.6	-0.30148	-0.30102	-0.30105	-0.29680	-0.30160	-0.29667	-0.30156
RMSE			0.00054	0.00051	0.00706	0.00012	0.00549	0.00012
S	σ	Benchmark Delta	h=0.5		h=1		h=2	
			Bin	BBS	Bin	BBS	Bin	BBS
36	0.2	-0.69680	-0.69795	-0.69698	-0.69748	-0.69786	-0.70116	-0.70131
40	0.2	-0.40475	-0.40485	-0.40496	-0.40613	-0.40578	-0.40927	-0.40898
44	0.2	-0.21407	-0.21436	-0.21435	-0.21507	-0.21497	-0.21758	-0.21750
36	0.4	-0.50875	-0.51448	-0.50874	-0.50736	-0.50890	-0.51051	-0.50968
40	0.4	-0.39063	-0.39138	-0.39069	-0.39071	-0.39084	-0.39214	-0.39158
44	0.4	-0.29582	-0.29470	-0.29592	-0.29606	-0.29608	-0.29690	-0.29672
36	0.6	-0.43621	-0.43467	-0.43619	-0.43504	-0.43629	-0.43718	-0.43672
40	0.6	-0.36269	-0.36376	-0.36264	-0.36308	-0.36278	-0.36275	-0.36319
44	0.6	-0.30148	-0.29674	-0.30150	-0.29705	-0.30162	-0.30447	-0.30193
RMSE			0.00263	0.00014	0.00172	0.00059	0.00275	0.00243

表一為在分割期數為 300 期，價內、價平與價外，以及不同波動度、不同 h 值的情況下，EB 法、EBBS 法、Bin 法與 BBS 法之 delta 值。表中可見，美式賣權之 delta 值與標的

資產 S 呈正向關係，至於隨波動度 σ 之變化關係，則需視價性而定。觀察各模型之 RMSE (root of the mean squared error) 值可發現，Bin 法在差分擾動量 h 值較小時，如表顯示

$h=0.01$ 、 $h=0.1$ 時的誤差較大，且隨著 h 值增加，如 $h=0.5$ 、 $h=1$ 及 $h=2$ 時，其誤差反而變小，顯然，Bin 法會受到 h 值變動產生不穩定的情形，且其估計誤差亦是所有模型中最大者。而 BBS 法則剛好相反，當差分擾動量 h 值較小時，如 $h=0.01$ 、 $h=0.1$ 及 $h=0.5$ 時，RMSE 值較小，其數值如表中顯示分別為 0.00012、0.00012 與 0.00014，而隨著 h 值增加，如 $h=1$ 及 $h=2$ 時，其誤差卻有明顯增加。可見，BBS 法並未能

完全避免 h 值變動的影響，其估計準度則是與 EB 法或 EBBS 法互有領先。雖然在差分擾動量 h 值較小時，BBS 法之 RMSE 值略小於 EB 法與 EBBS 法，但根據圖三可知，BBS 法的數值解存有嚴重波動現象，其估計結果顯然較不穩定，又圖七也可看出該三個模型之 δ 誤差值相當接近。因此，在同時考量計算之效率性與可靠性下，整體而言，EB 法與 EBBS 法仍是較理想的選擇。

表二 當 $K=40$ 、 $r=0.06$ 、 $T=1$ 、 $\text{Step}=300$ 時，各模型之 Gamma 估計結果

S	σ	Benchmark Gamma	EB	EBBS	h=0.01		h=0.1	
					Bin	BBS	Bin	BBS
36	0.2	0.08672	0.08660	0.08663	0.09079	0.10472	0.08461	0.10360
40	0.2	0.05973	0.05970	0.05965	1.45457	0.07443	0.24402	0.06159
44	0.2	0.03652	0.03651	0.03650	0.03450	0.08127	0.03232	0.03857
36	0.4	0.03259	0.03251	0.03252	0.01432	0.03073	0.01252	0.03184
40	0.4	0.02653	0.02650	0.02648	1.75937	0.03007	0.27325	0.02559
44	0.4	0.02099	0.02097	0.02096	0.08893	0.01543	0.03368	0.02036
36	0.6	0.02008	0.02002	0.02003	0.01108	0.02959	0.00560	0.02182
40	0.6	0.01676	0.01673	0.01672	1.83549	0.01186	0.28263	0.01634
44	0.6	0.01392	0.01388	0.01388	0.00027	0.01715	0.00467	0.01426
RMSE			0.00006	0.00006	0.95808	0.01737	0.13597	0.00575

S	σ	Benchmark Gamma	h=0.5		h=1		h=2	
			Bin	BBS	Bin	BBS	Bin	BBS
36	0.2	0.08672	0.07868	0.08721	0.08659	0.08704	0.08653	0.08681
40	0.2	0.05973	0.08086	0.05987	0.06113	0.05973	0.06042	0.05977
44	0.2	0.03652	0.05030	0.03683	0.03639	0.03655	0.03649	0.03665
36	0.4	0.03259	0.01446	0.03243	0.02922	0.03251	0.03205	0.03256
40	0.4	0.02653	0.07068	0.02676	0.04063	0.02664	0.02749	0.02652
44	0.4	0.02099	0.05450	0.02107	0.03350	0.02111	0.02075	0.02099
36	0.6	0.02008	0.00606	0.02001	0.00624	0.01999	0.01914	0.02007
40	0.6	0.01676	0.06937	0.01667	0.03786	0.01682	0.02132	0.01676
44	0.6	0.01392	0.00359	0.01383	0.00371	0.01380	0.01104	0.01389
RMSE			0.02823	0.00023	0.01110	0.00013	0.00188	0.00006

在分割期數為 300 期時，表二所列者係價內、價平與價外，以及不同波動度、不同 h 值的情況下，EB 法、EBBS 法、Bin 法與 BBS 法之 γ 值。由表可見，不同於美式賣權之 δ 值者，其 γ 值與標的資產 S 或波動度 σ 皆呈反向關係。此外，無論在任何 h 值之條件下，Bin 法之數值誤差皆相當不理想，且就 BBS 法而言，當 h 值較小，例如 $h=0.01$ 與 $h=0.1$ 時，亦未能獲致令人滿意的結果。而隨著 h 值增大，BBS 法的 γ 值會逐漸趨近正確解，但 Bin 法的 γ 值則仍舊無法得到有效的改善，顯然兩者均容易受到 h 值的影響。由 RMSE 值亦可觀察到，Bin 法與 BBS 法之誤差皆隨著 h 值增加而遞減，雖然相形之下，BBS 法似乎明顯優於 Bin 法，但與 EB 法、EBBS 法之 RMSE 值均為 0.00006 相比，其結果的穩定性還是遠不如預期。因此，無論就估計之準度或效率而言，在衡量美式選擇權之 γ 值上，採用 EB 法及

EBBS 法會較妥當。

肆、結論

由於美式選擇權具有可以提早履約的特性，直至目前為止尚未有封閉解的存在，因此，在評價美式選擇權的問題上有一定的困難度。而眾多的求解數值方法中，以二元樹模型運用最為普遍，另外，過去文獻則是較少探討有關選擇權避險參數的部份。因此，本研究採 Broadie and Detemple(1996)提出的 BBS 模型，與 Pelsser and Vorst(1994)提出的擴展二元樹模型作為估計避險參數的主要模型，並加入二元樹模型與擴展 BBS 模型一起作討論。藉由數值結果之比較，以驗證 Chung and Shackleton (2002)所推論之 BBS 法也可有效衡量美式選擇權避險參數值的論點，其中，主要估計的避險參數則分別是 δ 值與 γ 值。

研究顯示，Bin 法與 BBS 法均容易受到差分擾動量 h 值的影響，尤其是在 h 值較小的情況下，其 δ 值與 γ 值會隨著期數的改變而產生嚴重波動的現象。至於 EB 法與 EBBS 法所得結果與 h 值無關，則相對較為穩定，並且 EBBS 法之估計誤差更是呈平滑遞減的趨勢。此外，當不同參數條件變化時，有關各模型在價內、價平及價外的 δ 與 γ 估計值之比較發現，Bin 法所得結果最差，不僅數值解有很大的起伏，且準確性亦相當不理想。至於 BBS 法則是在 δ 誤差方面，與 EB 法或 EBBS 法呈互有優劣的結果，然由於其間之差異不大，並且 BBS 法的數值解仍存在嚴重的波動現象，故整體而言，EB 法與 EBBS 法之 δ 值依然較 BBS 法穩定可靠。另外，關於 γ 誤差方面，EB 法與 EBBS 法無論是準確性或可靠性均係明顯優於 BBS 法。由此可見，雖然 Chung and Shackleton (2002) 及張森林等(2008)的研究均顯示，BBS 法可以有效改善歐式選擇權的避險參數估計值，但該單調及平滑收斂的特性卻無法適用於美式選擇權之避險參數估計上，亦即 BBS 法的穩定性依然會受到差分擾動量 h 值的影響。因此，就美式選擇權避險參數之估計效率與準度而言，擴展二元樹模型仍是較佳的模型選擇。

參考文獻

- 張森林、石百達、葉宗穎 (2008)。具單調與平滑收斂特性的二項樹選擇權定價模型分析。《期貨與選擇權學刊》，1卷2期，47-72頁。
- 蔡明憲、徐守德、廖四郎、許溪南 (2000)。美式選擇權的定價－隱含相信模型及美國S&P 100指數選擇權的應用。《財務金融學刊》，8卷1期，33-66頁。
- Barone-Adesi, G. & Whaley, R. E. (1987). Efficient Analytic Approximation of American Option Values. *The Journal of Finance*, 42, 301-320.
- Bensoussan, A. (1984). On the Theory of Option Pricing. *Acta Appl Math*, 2, 139-158.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.
- Boyle, P. P. (1986). Option Valuation Using a Three Jump Process. *International Options Journal*, 3, 7-12.
- Broadie, M. & Detemple, J. (1996). American Option Valuation: New Bounds, Approximations and a Comparison of Existing Methods. *Review of Financial Studies*, 9, 1211-1250.
- Burkovska, O., Gass, M., Glau, K., Mahlstedt, M., Schoutens, W., & Wohlmuth, B. (2018). Calibration to American Options: Numerical Investigation of the de-Americanization Method. *Quantitative Finance*, 18(7), 1091-1113.
- Chung, S. L. & Shackleton, M. (2002). The Binomial Black-Scholes Model and the Greeks. *Journal of Futures Markets*, 22, 143-153.
- Chung, S. L. & Shih, P. T. (2007). Generalized Cox-Ross-Rubinstein Binomial Model. *Management Science*, 53, 508-520.
- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- Fatone, L., Mariani, F., Recchioni, M. C., & Zirilli, F. (2015). The Barone-Adesi Whaley Formula to Price American Options Revisited. *Applied Mathematics*, 6, 382-402.
- Figlewski, S. & Gao, B. (1999). The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing. *Journal of Financial Economics*, 53, 313-351.
- Glau, K., Mahlstedt, M., & Pötz, C. (2019). A New Approach for American Option Pricing: The Dynamic Chebyshev Method. *SIAM J. Sci. Comput.*, 41(1), B153-B180.
- Heath, D. Jarrow, R., & Morton, A. (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology. *Econometrica*, 60, 77-105.
- Heston, S. & Zhou, G. (2000). On the Rate of Convergence of Discrete-Time Contingent Claims. *Mathematical Finance*, 10, 53-75.
- Hilliard, J. & Schwartz, A. (2005). Pricing European and American Derivatives under a Jump-Diffusion Process: A Bivariate Tree Approach. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 40, 671-90.
- Hull, J. C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives*. New York: Pearson Education.
- Karatzas, I. (1988). On the Pricing of American Options. *Applied mathematics and optimization*, 17, 37-60.
- Kaushik, I. A., James, N., & Bodurtha, Jr. (1995). Discrete-Time of American Options with Stochastic Interest Rates. *Review of Financial Studies*, 8, 193-234.
- Letourneau, P. & Stentoft, L. (2019). Bootstrapping the Early Exercise Boundary in the Least-Squares Monte Carlo

- Method. *Journal of Risk and Financial Management*, 12, 190-210.
- Longstaff, F. A. & Schwartz, E.S. (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Square Approach. *Review of Financial Studies*, 14, 113-147.
- Pelsser, A. & Vorst, T. (1994). The Binomial Model and the Greeks. *Journal of Derivatives*, 1, 45-49.
- Rotondi, F. (2019). American Options on High Dividend Securities: A Numerical Investigation. *Risks*, 7, 59-78.
- Stentoft, L. (2019). Efficient Numerical Pricing of American Call Options Using Symmetry Arguments. *Journal of Risk and Financial Management*, 12, 59-84.
- Tian, Y. (1999). A Flexible Binomial Option Pricing Model. *Journal of Future Markets*, 19, 817-843.
- Zhao, J. (2018). American Option Valuation Methods. *International Journal of Economics and Finance*, 10, 1-13.

Numerical Efficiency of Binomial Trees for Estimating American Option Price Sensitivities

Chiun-Chieh Chen¹, Ya-Ting Ciou²

¹Department of Finance, Shu-Te University

²Graduate School of Finance, Shu-Te University

Abstract

With the prevalence of financial derivatives, options have turned into the most popular product in major derivatives markets. At present, the American option is relatively common in the market since it can be exercised anytime during its life; hence, it is comparatively difficult to price it. In the past, researchers have proposed various models to price American options; however, not so many studies focus on the estimation of hedge ratios. Regarding the lack in this field, this study attempts to compare hedge ratios in American options by several models, such as the binomial model, extended binomial tree, Binomial Black-Scholes (BBS) method, and extended BBS tree. The result shows that BBS cannot be applied on the estimation of hedge ratios in American options. In other words, the stability of BBS is affected by h , the perturbation value. Accordingly, the extended tree is still the better model in the estimation of hedge ratios in American options in terms of its efficiency and accuracy.

Keywords: american options, binomial models, greeks